بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید چمران اهواز

آمار استنباطی در پژوهش های تربیتی

مجتبی جهانی فر
دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی دانشگاه شهید چمران اهواز
نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

توزیع t (t-student)

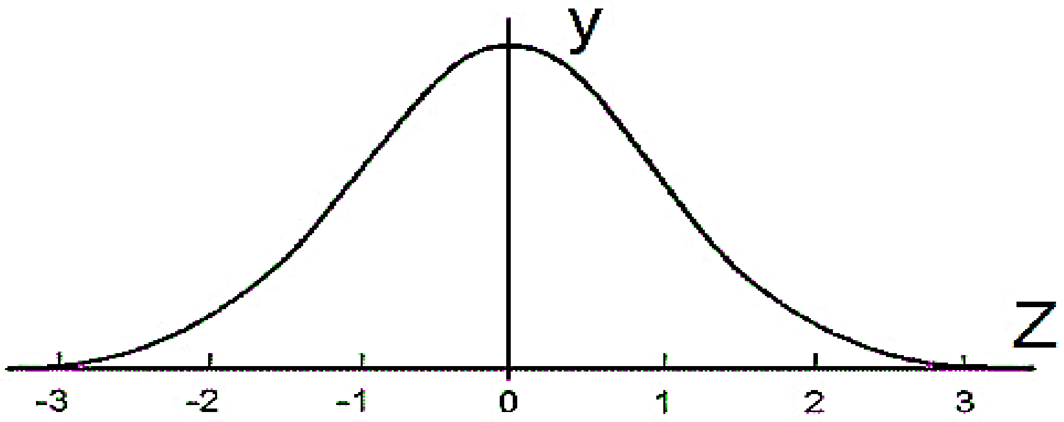
و

آزمون های آماری **دو میانگین**

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{[-\frac{Z^{۲}}{۲}]}$$

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

$$y \sim N(۰, ۱)$$



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n}$$

$$\sigma \rightarrow s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \quad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \\[2ex] s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})}{\boxed{n-1}}} \end{cases} \Rightarrow$$

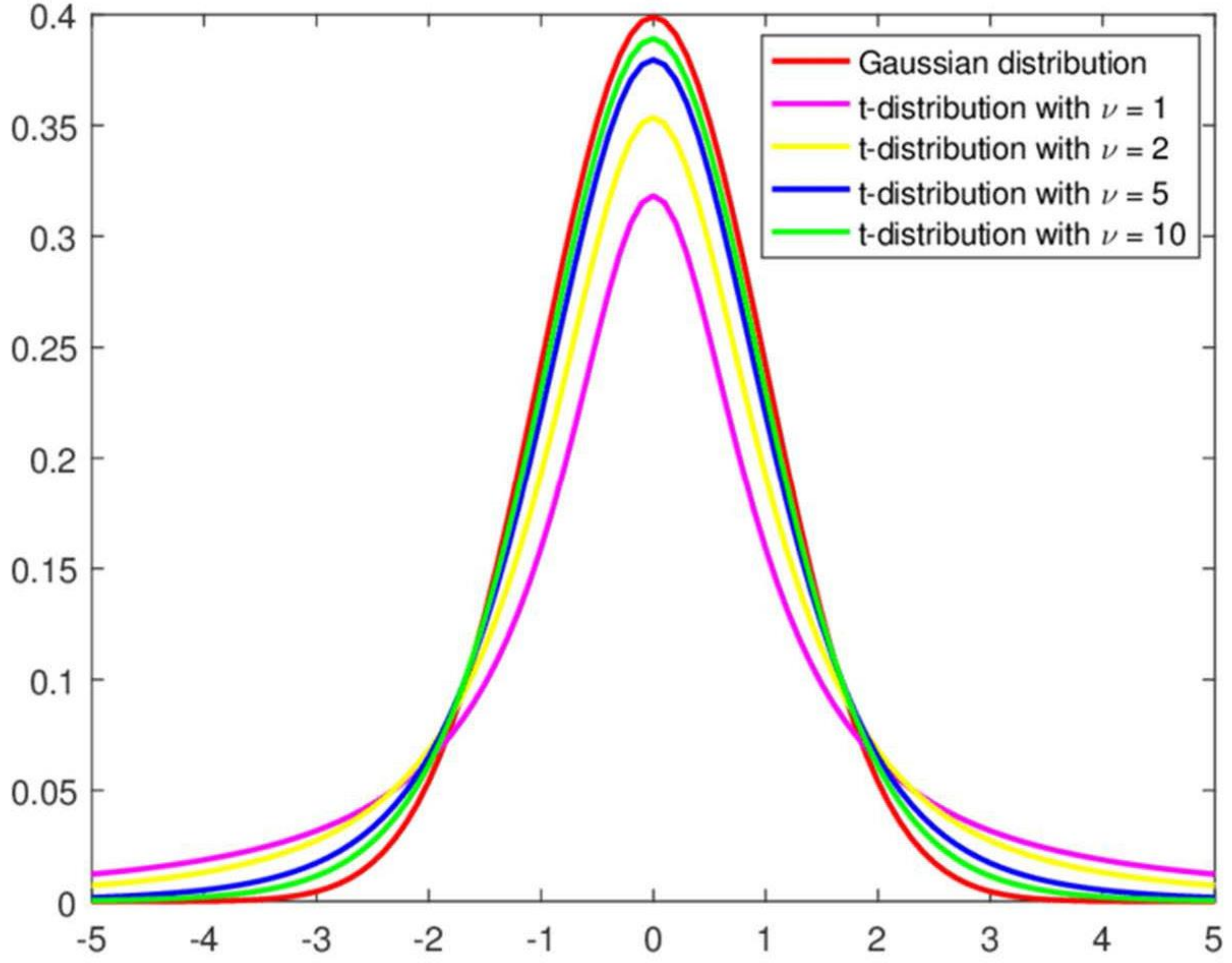
توزیع t به حجم نمونه وابسته است

n درجه آزادی میانگین

n-1 درجه آزادی انحراف استاندارد

<u>**درجه آزادی**</u> به تعداد ارزشهایی اطلاق می شود، که پس از قرار دادن **برخی محدودیت ها** در داده ها می‌توانند **آزادانه** تغییر کنند

$$df_{\bar{x}} = n \qquad df_s = n-1$$



$$\mu = ٠$$

$$s = \sqrt{\frac{df}{df - ٢}}$$

$$df \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow z$$

آزمون فرضیه درباره میانگین (طرح یک گروهی)

ساده ترین استفاده از آزمون t برای تک گروه است. در این آزمون ، میانگین فرضی و یا ادعایی برای جامعه تعیین می شود با استفاده از آزمون t این فرضیه و ادعا به بوته آزمایش گذاشته می شود.

One-sample t-test

فرض تحقیق (فرض خلاف)

بین میانگین جامعه و میانگین ادعا شده تفاوت معناداری وجود دارد

$$H_A:\begin{cases}\bar{x}-\mu\neq ۰\\ \bar{x}\neq\mu\end{cases}$$

فرض صفر

بین میانگین جامعه و میانگین ادعا شده تفاوت معناداری وجود ندارد

$$H_۰:\begin{cases}\bar{x}-\mu=۰\\ \bar{x}=\mu\end{cases}$$

۱– محاسبه t برای داده های جمع آوری شده

میانگین نمونه

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$$

میانگین فرض شده و یا ادعا شده برای جامعه

خطای استاندارد میانگین

۲– محاسبه درجات آزادی

$$df = n - ۱$$

حجم نمونه

۳– تعیین سطح اطمینان و مراجعه به جدول t

$\alpha = ۰/۰۱$ $\alpha = ۰/۰۵$

	سطح معناداری آزمون یک دامنه			
	0.05	0.025	0.01	0.005
	سطح معناداری آزمون دو دامنه			
d.f.	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947

t به دست آمده از جدول

۴– مقایسه t محاسبه شده و t جدول

۵– تصمیم درباره رد یا تایید فرضیه صفر

اگر t محاسبه شده از t جدول بیشتر باشد آنگاه

فرض صفر رد می شود (فرض تحقیق تایید می شود)

اگر t محاسبه شده از t جدول کمتر باشد آنگاه

فرض صفر تایید می شود (فرض تحقیق رد می شود)

مدیر مدرسه ای مدعی است میانگین اطلاعات عمومی شاگردان مدرسه از ۱۰۰ نمره برابر با ۹۰ است. برای بررسی این گفته نمونه ای ۲۵ نفری را از شاگردان مدرسه انتخاب و با آزمون اطلاعات عمومی آنها را می سنجد. میانگین شاگردان در این آزمون ۹۲ و انحراف استاندارد آنها برابر ۸ به دست آمد. آیا ادعای این مدیر مبنای علمی و آماری دارد؟

فرض تحقیق (فرض خلاف)

بین میانگین جامعه و میانگین ادعا شده مدیر تفاوت معناداری وجود دارد

$$H_A : \begin{cases} \bar{x} - \mu \neq ۰ \\ \bar{x} \neq \mu \end{cases}$$

فرض صفر

بین میانگین جامعه و میانگین ادعا شده مدیر تفاوت معناداری وجود ندارد

$$H_۰ : \begin{cases} \bar{x} - \mu = ۰ \\ \bar{x} = \mu \end{cases}$$

۱– محاسبه t برای داده های جمع آوری شده

$$\mu = ۹۰ \qquad \bar{x} = ۹۲ \qquad n = ۲۵$$

$$s_x = ۸ \Rightarrow S_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{۸}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{۹۲ - ۹۰}{۱/۶} = \frac{۲}{۱/۶} = ۱/۲۵$$

۲– محاسبه درجات آزادی

$$df = n - ۱ = ۲۵ - ۱ = ۲۴$$

۳– تعیین سطح اطمینان و مراجعه به جدول t

	سطح معناداری آزمون یک دامنه			
	0.05	0.025	0.01	0.005
	سطح معناداری آزمون دو دامنه			
d.f.	0.10	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787

مقدار **t** جدول در سطح معناداری ۰/۰۱ برابر با ۲/۷۹۷ است

۴– مقایسه t محاسبه شده و t جدول

مقدار **t** محاسبه شده از مقدار **t** جدول کمتر است

۵– تصمیم درباره رد یا تایید فرضیه صفر

فرض صفر تایید می شود (فرض تحقیق رد می شود)

یعنی بین میانگین اطلاعات عمومی مدرسه و میانگین ادعا شده مدیر تفاوت معناداری وجود ندارد

آزمون فرضیه تفاوت میانگین گروه ها

آزمون **t** می تواند تفاوت میانگین بین دو گروه را آزمایش کند.

تفاوت میانگین مشاهده شده در دو گروه ناشی از تصادف و خطای نمونه گیری است ؟

تفاوت میانگین مشاهده شده در دو گروه ناشی از تاثیر متغیر مستقل بر متغیر وابسته است؟

آزمون فرضیه برای تفاوت میانگین دو گروه مستقل

- هرگاه انتخاب یک گروه یا یک نمونه ، تاثیری در انتخاب گروه یا نمونه دیگر نداشته باشد آن دو گروه مستقل هستند.

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x}_{۱}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$$

$$\mu \rightarrow \bar{x}_{۲}$$

$$s_{\bar{x}_{۱} - \bar{x}_{۲}} = \sqrt{\left(\frac{۱}{n_{۱}} + \frac{۱}{n_{۲}}\right) \frac{\sum (x_{۱} - \bar{x}_{۱})^{۲} + \sum (x_{۲} - \bar{x}_{۲})^{۲}}{n_{۱} + n_{۲} - ۲}}$$

$$t = \frac{\bar{x}_{۱} - \bar{x}_{۲}}{s_{\bar{x}_{۱} - \bar{x}_{۲}}}$$

$$df = n_{۱} + n_{۲} - ۲$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{s_1^2 (n_1 - 1) + s_1^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

همگنی واریانس ها

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

نا همگنی واریانس ها

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

فرض تحقیق (فرض خلاف)

بین میانگین نمونه آزمایش و میانگین نمونه کنترل تفاوت معناداری وجود دارد

$$H_A:\begin{cases}\bar{x}_۱-\bar{x}_۲\neq ۰\\ \bar{x}_۱\neq \bar{x}_۲\end{cases}$$

فرض صفر

بین میانگین نمونه آزمایش و میانگین نمونه کنترل تفاوت معناداری وجود ندارد

$$H_۰:\begin{cases}\bar{x}_۱-\bar{x}_۲= ۰\\ \bar{x}_۱= \bar{x}_۲\end{cases}$$

۱– محاسبه t برای داده های جمع آوری شده

۲– محاسبه درجات آزادی

۳– تعیین سطح اطمینان و مراجعه به جدول t

۴– مقایسه t محاسبه شده و t جدول

۵– تصمیم درباره رد یا تایید فرضیه صفر

آزمون t می تواند تفاوت میانگین یک گروه را دوبار آزمایش می کند.

تفاوت میانگین های مشاهده شده در گروه ناشی از تصادف و خطای نمونه گیری است ؟

تفاوت میانگین های مشاهده شده در دو گروه ناشی از تاثیر متغیر مستقل بر متغیر وابسته است

$$t = \frac{\boxed{\bar{x} - \mu}}{s_{\bar{x}}}$$

$$\bar{x} - \mu \rightarrow \bar{D} = \frac{\sum D}{n}$$

$$s_{\bar{x}} \rightarrow S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum D^{٢} - \frac{(\sum D)^{٢}}{n}}{n - ١}}$$

$$t = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$$

فرض تحقیق (فرض خلاف)

بین نمره های آزمودنی در دو آزمایش متوالی تفاوت معناداری وجود دارد

$$H_A : \begin{cases} \bar{x}_۱ - \bar{x}_۲ \neq ۰ \\ \bar{x}_۱ \neq \bar{x}_۲ \end{cases}$$

فرض صفر

بین نمره های آزمودنی در دو آزمایش متوالی تفاوت معناداری وجود ندارد

$$H_۰ : \begin{cases} \bar{x}_۱ - \bar{x}_۲ = ۰ \\ \bar{x}_۱ = \bar{x}_۲ \end{cases}$$

۱- محاسبه t برای داده های جمع آوری شده

۲- محاسبه درجات آزادی

۳- تعیین سطح اطمینان و مراجعه به جدول t

۴- مقایسه t محاسبه شده و t جدول

۵- تصمیم درباره رد یا تایید فرضیه صفر

به‌منظور توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید. برای ۲۰ نفر آزمودنی یک آزمون هوش اجرا کرده‌ایم و سپس آنها را براساس نمره‌ای که از این آزمون کسب کرده‌اند در گروههای دوتایی جاداده‌ایم. یکی از اعضای هر جفت را در معرض روش تدریس A و عضو دیگر را در معرض روش B قرار داده‌ایم. در پایان برای آزمودنیهای هر دو گروه، آزمون یکسانی را اجراکردیم. اطلاعات جمع‌آوری شده در جدول (۳ - ۱۳) نشان داده‌شده است. فرض صفر در این مثال می‌گوید که بین نمره‌های آزمودنیهایی که به روش A آموزش دیده‌اند و نمره‌های آزمودنیهایی که از طریق روش B آموزش دیده‌اند، تفاوت معناداری وجود ندارد. $H_0 : \mu_D = ۰$ یا $H_0 : \mu_۱ - \mu_۲ = ۰$ فرض خلاف عبارت است از: $H_A : \mu_D \neq ۰$ یا $H_A : \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰$

جدول ۳ ـ ۱۳ نمره‌های ده‌نفر آزمودنی همتراز شده

روش A $(X_۱)$	روش B $(X_۲)$	D	$D^۲$
۱۰	۷	۳	۹
۵	۳	۲	۴
۶	۷	-۱	۱
۷	۵	۲	۴
۱۰	۸	۲	۴
۶	۴	۲	۴
۷	۵	۲	۴
۸	۲	۶	۳۶
۶	۳	۳	۹
۵	۶	-۱	۱
$\Sigma X_۱ = ۷۰$	$\Sigma X_۲ = ۵۰$	$\Sigma D = ۲۰$	$\Sigma D^۲ = ۷۶$
$\bar{X}_۱ = ۷$	$\bar{X}_۲ = ۵$	$\bar{D} = ۲$	

$$t = \frac{\Sigma D}{\sqrt{\frac{n\Sigma D^۲ - (\Sigma D)^۲}{n-۱}}} = \frac{۲۰}{\sqrt{\frac{(۱۰)(۷۶)-(۲۰)^۲}{۱۰-۱}}} = ۳/۱۶ \qquad (۱۳ - ۱۵)$$

t جدول درسطح ۰/۰۵ $(\alpha = ۰/۰۵)$ و درجات آزادی ۹ $(d.f = n-۱ = ۱۰-۱ = ۹)$ مساوی ۲/۲۶۲

$$\bar{D} = \frac{\sum D}{n}$$

$$S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum D^۲ - \frac{(\sum D)^۲}{n}}{n-۱}}$$

$$t = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}}$$

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^۲ - (\sum D)^۲}{n-۱}}}$$

$$df = n - ۱$$