

آمار استنباطی در پژوهش های تربیتی



مجتبی جهانی فر
دانشکده روانشناسی و علوم تربیتی دانشگاه شهید چمران اهواز
نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

تحليل واريانس يک طرفه (یک راهه)

One-way Analysis Of Variance (One-way ANOVA)



چرا تحلیل واریانس!؟

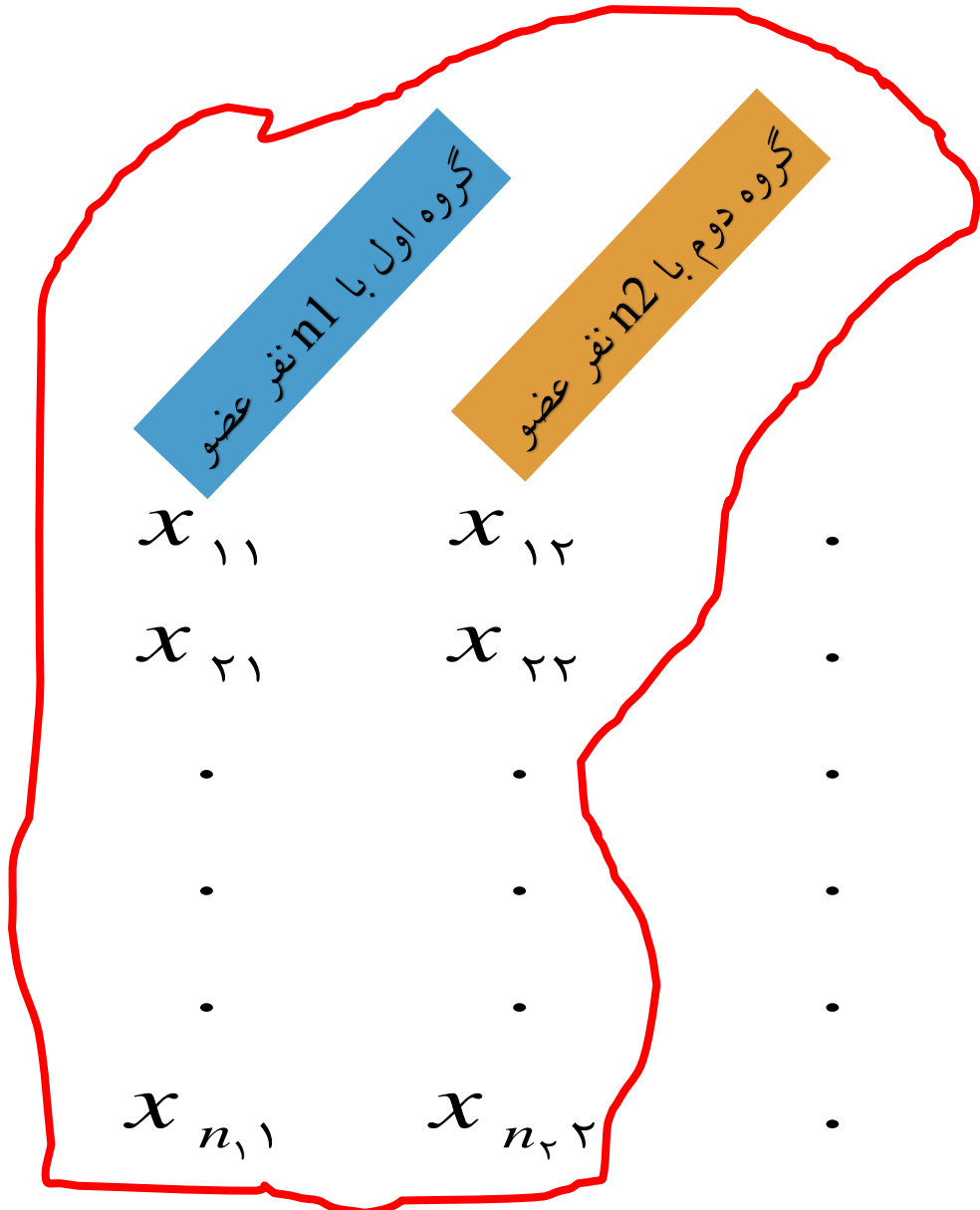
- یکی از محدودیت های آزمون t این است که تنها برای دو گروه قابل اجرا است.
متغیر مستقل تنها در دو سطح اجرا می شود
- تحلیل واریانس می تواند میانگین دو گروه و یا بیشتر را با هم مقایسه کند.
متغیر مستقل می تواند در چند سطح اجرا شود.

برای اجرای تحلیل واریانس چه مفروضاتی لازم است!!

- توزیع متغیر وابسته (متغیر مورد پژوهش) در جامعه توزیع طبیعی باشد.
- واریانس در جامعه هایی که نمونه ها از آن انتخاب می شوند مساوی باشد.
- آزمودنی ها به صورت مستقل و تصادفی انتخاب شده و در گروهها جایگزین شوند.
- مقیاس اندازه گیری در تحلیل واریانس حداقل فاصله ای است.

آزمون t

در تحلیل واریانس n نفر به طور تصادفی در k گروه جایگزین می شوند.
نمره شخص i ام که عضو گروه j ام است. x_{ij}




گروه k با n_k نفر عضو

x_{1k}
x_{2k}
.
.
.
$x_{n_k k}$

در پس تحلیل واریانس چه منطقی نهفته است؟!

اندازه اختلاف بین میانگین گروهها را نمایش می دهد
این پراکندگی بین میانگین ها ممکن است ناشی از شانس و یا ناشی از تاثیر متغیر مستقل باشد
انتظار می رود پراکندگی میانگین بین گروهها بزرگ تر از آن باشد که بتوان آن را شانسی بپنداریم


$$\text{واریانس کل نمره ها} = \text{واریانس بین گروهی} + \text{واریانس درون گروهی}$$



پراکندگی نمره ها در درون گروهها را نمایش می دهد
این پراکندگی ناشی از متغیر مستقل نیست
این پراکندگی بیشتر ناشی از تفاوت های فردی و نقص در وسایل اندازه گیری است
به این پراکندگی واریانس خطا نیز گفته می شود.

آیا تفاوت در میانگین گروهها شانس است؟

و یا متغیر مستقل توانسته بین این میانگین ها اختلاف ایجاد کند؟

معرفی چند نماد

SS_T = Total groups Sum of Square

مجموع مجذورات کل نمره ها

SS_B = Between groups Sum of Square

مجموع مجذورات بین گروهها

SS_w = Within groups Sum of Square

مجموع مجذورات درون گروهها

$$SS_T = SS_B + SS_w$$

۱- مجموع مجذورات کل

مجموع انحراف هریک از نمره‌ها از میانگین کل نمره‌ها

$$SS_T = (x_{11} - \bar{x}_T)^2 + (x_{12} - \bar{x}_T)^2 + \dots + (x_{n_k k} - \bar{x}_T)^2$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}$$

با استفاده از نمره های خام

x_{11}	x_{12}	.	.	.	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	.	.	.	x_{2k}
.
.
.
x_{n_1}	x_{n_2}	.	.	.	x_{n_k}

۲- مجموع مجذورات بین گروه‌ها (آزمایش)

مجموع انحراف میانگین هریک از گروهها از میانگین کل نمره‌ها

$$SS_B = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x}_T)^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_T)^2 + \dots + n_k (\bar{x}_k - \bar{x}_T)^2$$

$$SS_B = \frac{(\sum_{i=1}^{n_1} x_i)^2}{n_1} + \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} x_i)^2}{n_2} + \dots + \frac{(\sum_{i=1}^{n_k} x_i)^2}{n_k} - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}$$

با استفاده از نمره های خام

x_{11}	x_{12}	.	.	.	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	.	.	.	x_{2k}
.
.
.
x_{n_1}	x_{n_2}	.	.	.	x_{n_k}
\bar{x}_1	\bar{x}_2	.	.	.	\bar{x}_k

۳- مجموع مجذورات درون گروه ها (خطا)

مجموع انحراف هریک از نمره‌ها در هر گروه از میانگین گروه

$$SS_W = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2$$

$$SS_W = SS_T - SS_B$$

با استفاده از نمره های خام

x_{11}	x_{12}	.	.	.	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	.	.	.	x_{2k}
.
.
.
x_{n_11}	x_{n_12}	.	.	.	x_{n_1k}
\bar{x}_1	\bar{x}_2	.	.	.	\bar{x}_k

Mean of Squares = MS

میانگین مجذور ها

$$MS_T = \frac{SS_T}{n-1}$$

$$n-1$$

→ درجات آزادی کل

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$$

$$k-1$$

→ درجات آزادی بین گروه ها

$$MS_W = \frac{SS_W}{n-k}$$

$$n-k$$

→ درجات آزادی درون گروه ها

فرض تحقیق (فرض خلاف)

اعمال متغیر مستقل توانسته بین میانگین گروه ها تفاوت معناداری ایجاد کند

بین میانگین گروه ها تفاوت معنی داری وجود دارد

$$H_A : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \neq \dots \neq \bar{x}_k$$

فرض صفر

اعمال متغیر مستقل نتوانسته بین میانگین گروه ها تفاوت معناداری ایجاد کند

بین میانگین گروه ها تفاوت معنی داری وجود ندارد

$$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k$$

مراحل فرض آزمایی در تحلیل واریانس



$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

جدول F : توزیع F
 ۵٪ (ارقام کم رنگ) ۱٪ (ارقام پر رنگ)

درجات آزادی مخرج	درجات آزادی صورت																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6106	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	241 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352	254 6361	254 6366
2	18.51 98.49	19.00 99.00	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.46 99.47	19.47 99.48	19.47 99.48	19.48 99.49	19.49 99.49	19.49 99.49	19.50 99.50	19.50 99.50
3	10.13 34.12	9.55 30.82	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.60 26.41	8.58 26.35	8.57 26.27	8.56 26.23	8.54 26.18	8.54 26.14	8.53 26.12
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.71 13.74	5.70 13.69	5.68 13.61	5.66 13.57	5.65 13.52	5.64 13.48	5.63 13.46
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.29	4.44 9.24	4.42 9.17	4.40 9.13	4.38 9.07	4.37 9.04	4.36 9.02
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79	4.00 7.72	3.96 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.77 7.14	3.75 7.09	3.72 7.02	3.71 6.99	3.69 6.94	3.68 6.90	3.67 6.88
7	5.59 12.25	4.47 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.34 5.90	3.32 5.85	3.29 5.78	3.28 5.75	3.25 5.70	3.24 5.67	3.23 5.65
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 5.36	3.12 5.28	3.08 5.20	3.05 5.11	3.03 5.06	3.00 5.00	2.98 4.96	2.96 4.91	2.94 4.88	2.93 4.86
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.33 5.80	3.22 5.62	3.14 5.47	3.07 5.35	2.97 5.26	2.94 5.18	2.91 5.11	2.86 5.00	2.82 4.92	2.77 4.80	2.74 4.73	2.70 4.64	2.67 4.56	2.64 4.51	2.61 4.45	2.59 4.41	2.56 4.36	2.55 4.33	2.54 4.31
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.67 4.17	2.64 4.12	2.61 4.05	2.59 4.01	2.56 3.96	2.55 3.93	2.54 3.91
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46	2.79 4.40	2.74 4.29	2.70 4.21	2.65 4.10	2.61 4.02	2.57 3.94	2.53 3.86	2.50 3.80	2.47 3.74	2.45 3.70	2.42 3.66	2.41 3.62	2.40 3.60
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22	2.69 4.16	2.64 4.05	2.60 3.98	2.54 3.86	2.50 3.78	2.46 3.70	2.42 3.61	2.40 3.56	2.36 3.49	2.35 3.46	2.32 3.41	2.31 3.38	2.30 3.36
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02	2.60 3.96	2.55 3.85	2.51 3.78	2.46 3.67	2.42 3.59	2.38 3.51	2.34 3.42	2.32 3.37	2.28 3.30	2.26 3.27	2.24 3.21	2.22 3.18	2.21 3.16
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86	2.53 3.80	2.48 3.70	2.44 3.62	2.39 3.51	2.35 3.43	2.31 3.34	2.27 3.26	2.24 3.21	2.21 3.14	2.19 3.11	2.16 3.06	2.14 3.02	2.13 3.00
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.29 3.29	2.25 3.20	2.21 3.12	2.18 3.07	2.15 3.00	2.12 2.97	2.10 2.92	2.08 2.89	2.07 2.87
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61	2.42 3.55	2.37 3.45	2.33 3.37	2.28 3.25	2.24 3.18	2.20 3.10	2.16 3.01	2.13 2.96	2.09 2.89	2.07 2.86	2.04 2.80	2.02 2.77	2.01 2.75
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52	2.38 3.45	2.33 3.35	2.29 3.27	2.23 3.16	2.19 3.08	2.15 3.00	2.11 2.92	2.08 2.86	2.04 2.79	2.02 2.76	1.99 2.70	1.97 2.67	1.96 2.65

گروه‌ها	نمره‌ها	پیدا کردن مجموع مجذورهای کل		پیدا کردن مجموع مجذورهای درون گروه‌ها		پیدا کردن مجموع مجذور بین گروه‌ها		
		انحراف استاندارد از میانگین کل	مجذور انحراف نمره‌ها از میانگین کل	میانگین گروه	انحراف نمره‌ها از میانگین گروه	مجذور انحراف نمره‌ها از میانگین گروه	انحراف میانگین گروه از میانگین کل	مجذور انحراف میانگین گروه از میانگین کل
(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)	(۹)
گروه اول	۱۵ ۱۴ ۱۳ ۱۲ ۱۱ $\Sigma = 65$ $\bar{x} = 13$	۶ ۵ ۴ ۳ ۲	۳۶ ۲۵ ۱۶ ۹ ۴	۱۲	۲ ۱ ۰ -۱ -۲ $\Sigma = 0$	۴ ۱ ۰ ۱ ۴ $\Sigma = 10$	۴	۱۶ ۸۰ (۵×۱۶)
گروه دوم	۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ $\Sigma = 40$ $\bar{x} = 8$	۱ ۰ ۰ -۱ -۲ -۳	۱ ۰ ۰ ۱ ۴ ۹	۸	۲ ۱ ۰ -۱ -۲ $\Sigma = 0$	۴ ۱ ۰ ۱ ۴ $\Sigma = 10$	-۱	۱ ۵ (۵×۱)
گروه سوم	۸ ۷ ۶ ۵ ۴ $\Sigma = 30$ $\bar{x} = 6$	-۱ -۲ -۳ -۴ -۵	۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵	۶	۲ ۱ ۰ -۱ -۲ $\Sigma = 0$	۴ ۱ ۰ ۱ ۴ $\Sigma = 10$	-۳	۹ ۲۵ (۳×۹)
مجموع = ۱۳۵ مجذور نمره‌ها میانگین کل = ۹		$\Sigma = 0$	$SS_T = 160$	$SS_W = 30$	$SS_B = 130$			

$$SS_T = (x_{11} - \bar{x}_T)^2 + (x_{12} - \bar{x}_T)^2 + \dots + (x_{n_k k} - \bar{x}_T)^2$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2$$

$$SS_B = n_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_T)^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_T)^2 + \dots + n_k(\bar{x}_k - \bar{x}_T)^2$$

در سه گروه مختلف آزمایشی جایگزین شده‌اند. چنانچه نتیجه اندازه‌گیری متغیر وابسته در جدول ۳ - ۱۵ در دست باشد، با استفاده از روش تجزیه و تحلیل واریانس تعیین کنید که آیا بین میانگینهای سه گروه تفاوت معناداری وجود دارد یا خیر؟ فرضهای آماری که در این مثال مورد آزمون قرار خواهد گرفت، عبارتند از:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

جدول ۳ - ۱۵ داده‌های فرضی برای سه گروه

آزمایش یک		آزمایش دو		آزمایش سه	
x_1	x_1^2	x_2	x_2^2	x_3	x_3^2
۱۰	۱۰۰	۱۲	۱۴۴	۱۰	۱۰۰
۸	۶۴	۱۰	۱۰۰	۸	۶۴
۶	۳۶	۸	۶۴	۷	۴۹
۶	۳۶	۷	۴۹	۷	۴۹
۵	۲۵	۶	۳۶	۶	۳۶
۵	۲۵	۵	۲۵	۶	۳۶
۴	۱۶	۵	۲۵	۵	۲۵
۴	۱۶	۴	۱۶	۴	۱۶
۴	۱۶	۴	۱۶	۴	۱۶
۲	۴	۳	۹	۲	۴

$$\sum x_1 = 54 \quad \sum x_1^2 = 338 \quad \sum x_2 = 64 \quad \sum x_2^2 = 484 \quad \sum x_3 = 59 \quad \sum x_3^2 = 395$$

$$\sum x = \sum x_1 + \sum x_2 + \sum x_3 = 54 + 64 + 59 = 177$$

$$\sum x^2 = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \sum x_3^2 = 338 + 484 + 395 = 1217$$

مجموع مجذورات کل برابر است با:

$$SS_t = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$$

$$SS_t = 1217 - \frac{(177)^2}{30}$$

$$SS_t = 1217 - 1044/3 = 172/7$$

مجموع مجذورات بین گروهها:

$$SS_b = \frac{(\sum x_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum x_2)^2}{n_2} + \frac{(\sum x_3)^2}{n_3} - \frac{(\sum x)^2}{N}$$

$$SS_b = \frac{(54)^2}{10} + \frac{(64)^2}{10} + \frac{(59)^2}{10} - \frac{(177)^2}{30}$$

$$SS_b = \frac{2916}{10} + \frac{4096}{10} + \frac{3481}{10} - \frac{31329}{30}$$

$$SS_b = 1049/3 - 1044/3 = 5$$

مجموع مجذور درون گروهها مساوی است با:

$$SS_w = SS_t - SS_b$$

$$SS_w = 172/7 - 5 = 167/7$$

میانگین مجذورات بین گروهها مساوی است با:

$$MS_b = \frac{SS_b}{k-1}$$

$$MS_b = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$MS_w = \frac{SS_w}{N-k}$$

$$MS_w = \frac{167/7}{27} = 6/2$$

$$F = \frac{MS_b}{MS_w} = \frac{2.5}{6/2} = 0.403$$

میانگین مجذورات درون گروهها برابر است با:

با توجه به محاسبات انجام شده نسبت F مساوی است:



F	میانگین مجذورات MS	درجات آزادی d.f	مجموع مجذورات SS	منابع تغییر
0.403	2/5	2	5	بین گروهها
	6/2	27	167/7	درون گروهها
		29	172/7	جمع