برای استفاده از انحراف متوسط، مقیاس اندازه‌گیری باید حداقل فاصله‌ای باشد. زیرا برای تفسیر نتایج تحقیق، دانستن فاصله نمره‌ها از میانگین ضروری است و برای محاسبه میانگین نیز، داشتن مقیاس فاصله‌ای الزامی است. به‌عبارت دیگر انحراف از میانگین زمانی دارای معنا است که مقیاس اندازه‌گیری فاصله‌ای باشد. انحراف متوسط میزان پراکندگی موجود در توزیع نمره‌ها را نشان می‌دهد. محاسبه و تفسیر این شاخص نسبتاً آسان است. اما یکی از مشکلات موجود در این شاخص این است که مقدار آن از توزیعی به توزیع دیگر به‌صورت چشمگیری دستخوش تغییر می‌شود. چون با این شاخص نمی‌توان عملیات جبری را انجام داد، بنابراین در استفاده از آن باید احتیاط کرد.

واریانس[1]

همان‌طور که قبلاً گفته شد در محاسبه انحراف متوسط، علائم اعداد و در محاسبه انحراف چارکی، کلیه ارزشهای مقداری تمام اعداد مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. برای محاسبه یک شاخص پراکندگی باثبات و معتبر باید از ارزشهای عددی کلیه نمره‌ها استفاده کرد. قبلاً گفته شد که از بین شاخصهای مرکزی، میانگین شاخص باثبات و معتبرتری است. در صورتی‌که بتوانیم فاصله بین هریک از اعداد تا میانگین را تعیین کنیم آنگاه قادر خواهیم بود تا یک شاخص پراکندگی باثبات و معتبر را محاسبه کنیم. این روش در محاسبه واریانس و انحراف استاندارد به‌کار برده می‌شود. واریانس یک شاخص پراکندگی است که از طریق محاسبهٔ انحراف نمره‌ها از میانگین محاسبه می‌شود و عبارت است از میانگین انحراف نمره‌ها از میانگین یا مجموع مجذور انحراف نمره‌ها از میانگین تقسیم بر تعداد نمره‌ها.

محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی نشده

۱. میانگین توزیع را محاسبه کنید ($\bar{X}$).

۲. انحراف هریک از نمره‌ها را از میانگین به دست آورید. ($X - \bar{X}$).

۳. نمره‌های انحراف محاسبه شده را به توان دوم برسانید $(X - \bar{X})^2$.

۴. مجموع مجذور انحراف از میانگین را محاسبه کنید. $\Sigma(X - \bar{X})^2$.

۵. حاصل جمع مجموع مجذور انحراف از میانگین را بر N (تعداد کل نفرات) تقسیم کنید.

به‌طور خلاصه برای محاسبه واریانس از فرمول زیر استفاده می‌شود:

(۴-۷) واریانس نمونه $$S^2 = \frac{\Sigma \chi^2}{n-1} \quad \text{یا} \quad S^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n-1}$$

(۴-۸) واریانس جامعه $$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N} = \frac{\Sigma\chi^2}{N}$$

---

1. Variance

نمره مشاهده یا اندازه‌گیری شده = X

میانگین جامعه = μ

میانگین نمونه = $\bar{X}$

تعداد کل مشاهدات یا اعداد = N

مجموع مجذور انحراف نمره‌ها از میانگین = $\Sigma\chi^۲$

فرمولهای (۷ـ۴) و (۸ـ۴) را محاسبه واریانس از راه انحراف از میانگین می‌نامند. در صورتی که میانگین اعشار داشته باشد محاسبه واریانس طولانی و دشوار خواهد شد. بنابراین برای رفع این مشکل به‌جای میانگین مقدار مساوی آن را در فرمولهای فوق قرار می‌دهیم:

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma(X - \bar{X})^۲$$

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma(X^۲ - ۲X\bar{X} + \bar{X})^۲$$

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma X^۲ - \Sigma ۲X\bar{X} + \Sigma\bar{X}^۲$$

چون $\Sigma\bar{X}^۲ = N\bar{X}^۲$ بنابراین:

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma X^۲ - ۲\bar{X}\Sigma X + N\bar{X}^۲$$

در صورتی که در معادله فوق به‌جای میانگین مقدار مساوی آن یعنی $\frac{\Sigma X}{N}$ را قرار دهیم معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma X^۲ - ۲\frac{\Sigma X}{N}\Sigma X + N\frac{\Sigma X^۲}{N^۲}$$

معادله فوق را ساده می‌کنیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma X^۲ - ۲\frac{(\Sigma X)^۲}{N} + \frac{(\Sigma X)^۲}{N}$$

$$\Sigma\chi^۲ = \Sigma X^۲ - \frac{(\Sigma X)^۲}{N}$$

در صورتی که به‌جای $\Sigma\chi^۲$ مقدار مساوی آن را در فرمول قرار دهیم فرمول زیر که به فرمول محاسبه واریانس از راه اعداد خام معروف است به‌دست می‌آید:

$$\sigma^۲ = \frac{\Sigma X^۲ - \frac{(\Sigma X)^۲}{N}}{N} \qquad (۴\text{ـ}۹)$$

روش دیگری که از آن برای محاسبه واریانس استفاده می‌شود عبارت است از تقسیم مجموع مجذور انحراف نمره‌ها از میانگین بر ۱ - N به‌جای N. برحسب این تعریف فرمول واریانس به‌صورت زیر خواهد شد:

$$s^{۲} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^{۲}}{n-۱} \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

یا

$$s^{۲} = \frac{\Sigma x^{۲} - \frac{(\Sigma x)^{۲}}{n}}{n-۱} \qquad (۴\text{-}۱۱)$$

در کلیه شرایطی که پژوهشگر قصد برآورد واریانس جامعه را داشته باشد، از فرمول (۱۰ـ۴) یا (۱۱ـ۴) یعنی فرمولی که در مخرج آن $n - ۱$ وجود دارد استفاده می‌شود. اما در شرایطی که از شاخصهای آماری فقط برای توصیف استفاده شود از فرمولی که در مخرج آن n وجود دارد استفاده خواهد شد. به‌منظور آشنایی با نحوه محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی نشده به مثال زیر توجه کنید:

مثال: نمره‌های یک آزمون ریاضی برای ۱۱ نفر دانش‌آموز در جدول ۳ـ۴ نشان داده شده است. واریانس نمره‌های این دانش‌آموزان را با استفاده از فرمولهای (۱۰ـ۴) و (۱۱ـ۴) محاسبه کنید.

جدول ۳ـ۴ توزیع نمره‌های ۱۱ نفر دانش‌آموز در آزمون ریاضی

X	$X^{۲}$	$x = X - \bar{X}$	$x^{۲} = (X - \bar{X})^{۲}$
۱۶	۲۵۶	۶	۳۶
۱۴	۱۹۶	۴	۱۶
۱۲	۱۴۴	۲	۴
۱۱	۱۲۱	۱	۱
۱۰	۱۰۰	۰	۰
۱۰	۱۰۰	۰	۰
۹	۸۱	۱-	۱
۹	۸۱	۱-	۱
۸	۶۴	۲-	۴
۶	۳۶	۴-	۱۶
۵	۲۵	۵-	۲۵

$\bar{X} = ۱۰$ ۱۰۴

$\Sigma X = ۱۱۰$

$\Sigma X^{۲} = ۱۲۰۴$

$\Sigma(X - \bar{X})^{۲} = ۱۰۴$

الف) محاسبه از راه فرمول

$$S^{۲} = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^{۲}}{n - ۱}$$

۱. برای محاسبه میانگین، مجموع نمره‌ها را بر تعداد دانش‌آموزان تقسیم می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{۱۱۰}{۱۱} = ۱۰$$

۲. برای محاسبه χ یعنی $\bar{X}$ - X نمره هر دانش‌آموز را از میانگین ($\bar{X} = ۱۰$) کم می‌کنیم و در ستون مربوط قرار می‌دهیم.
۳. χهای محاسبه شده را به توان دوم می‌رسانیم و آنها را در ستون $\chi^۲$ قرار می‌دهیم.
۴. با تقسیم حاصل جمع ستون $\chi^۲$ یعنی $(X - \bar{X})^۲$ بر n - ۱، واریانس را محاسبه می‌کنیم.

$$S^۲ = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^۲}{n - ۱} = \frac{۱۰۴}{۱۱ - ۱} = ۱۰/۴$$

محاسبه واریانس با استفاده از فرمول (۱۱ - ۴) از راه اعداد خام

۱. نمره‌های کلیه دانش‌آموزان را باهم جمع می‌کنیم تا ΣX به‌دست آید.
۲. هریک از نمره‌ها را به توان دوم می‌رسانیم و آنها را در ستون $X^۲$ قرار می‌دهیم.
۳. حاصل جمع ستون $X^۲$ یعنی $\Sigma X^۲$ را محاسبه می‌کنیم.
۴. مقادیر محاسبه‌شده را به‌صورت زیر در فرمول جایگزین می‌کنیم:

$$s^۲ = \frac{\Sigma X^۲ - \frac{(\Sigma X)^۲}{n}}{n - ۱}$$

$$s^۲ = \frac{۱۲۰۴ - \frac{(۱۱۰)^۲}{۱۱}}{۱۱ - ۱} = \frac{۱۲۰۴ - ۱۱۰۰}{۱۰} = \frac{۱۰۴}{۱۰} = ۱۰/۴$$

محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی شده

روشهای مطرح‌شده در فوق زمانی به‌کار برده می‌شوند که اطلاعات جمع‌آوری‌شده به‌صورت جدول توزیع فراوانی تهیه و تنظیم نشده باشند. در شرایطی که اطلاعات جمع‌آوری‌شده به‌هر دلیلی به‌صورت جدول توزیع فراوانی خلاصه و طبقه‌بندی شوند، باید در محاسبه واریانس فراوانی تمام طبقه‌ها یا اعداد را مورد استفاده قرار داد. در چنین شرایطی واریانس با استفاده از دو روش به شرح زیر محاسبه می‌شود:

روش اول: محاسبه واریانس با استفاده از روش مستقیم

هنگامی که اطلاعات جمع‌آوری شده به‌صورت جدول توزیع فراوانی طبقه‌بندی شده باشند، واریانس را می‌توان با استفاده از فرمولهای زیر محاسبه کرد.

● *الف) محاسبه واریانس با استفاده از نمره‌های انحرافی*

$$s^۲ = \frac{\Sigma f\chi^۲}{n} \qquad (۴ - ۱۲)$$

در جدول ۴ ـ ۴ نمره‌های ۵۰ نفر به‌صورت جدول توزیع فراوانی نشان داده شده است. برای محاسبه واریانس اطلاعات موجود در این جدول مراحل زیر انجام می‌شود.

۱. برای اطلاعات جمع‌آوری شده یک جدول توزیع فراوانی که دارای ستونهای زیر باشد تنظیم کنید:

الف) طبقات (X)، ب) فراوانی (f)، و ج) نقطه میانی (X').

برای توضیح بیشتر به ستونهای ۱، ۲، ۳ جدول ۴ ـ ۴ مراجعه کنید.

۲. میانگین اطلاعات موجود در جدول توزیع فراوانی را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f X'}{n}$$

برای اطلاعات جدول (۴ ـ ۴) $\quad \bar{x} = \frac{۶۵۰}{۵۰} = ۱۳$

۳. به جدول مورد بحث ستونی با عنوان $(X' - \bar{x}) = \chi$ اضافه کنید. برای محاسبه اعداد این ستون، نقطه میانی هر طبقه را از میانگین کم کنید. به‌عنوان مثال χ برای طبقات ۲۳ ـ ۲۱ مطابق شرح زیر برابر با ۹ است.

$X = X' - \bar{x}$

$\chi = ۲۲ - ۱۳ = ۹$

۴. انحراف از میانگین یعنی ستون χ را به توان دوم برسانید تا ستون $\chi^۲$ به‌دست آید. $\chi^۲$ برای طبقه ۲۳ ـ ۲۱ برابر ۸۱ است.

۵. فراوانی هر طبقه (ستون f) را در $\chi^۲$ همان طبقه (ستون $\chi^۲$) ضرب کنید. با این عمل ستون $f\chi^۲$ به دست می‌آید. $f\chi^۲$ برای طبقه ۲۳ ـ ۲۱ مساوی ۴۰۵ $(۵ \times ۸۱ = ۴۰۵)$ است.

۶. مجموع اعداد ستون $f\chi^۲$ یعنی $\Sigma f\chi^۲$ را محاسبه کنید.

۷. حاصل جمع $f\chi^۲$ها یعنی $\Sigma f\chi^۲$ را بر n تقسیم کنید تا واریانس به‌دست آید.

$$s^۲ = \frac{\Sigma f\chi^۲}{n} = \frac{۱۴۵۸}{۵۰} = ۲۹/۱۶$$

برای توضیح بیشتر به جدول ۴ ـ ۴ مراجعه کنید.

جدول ۴ـ۴ محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی شده

طبقات X	فراوانی f	نقطه میانی X'	fX'	انحراف میانگین از $\chi = X' - \bar{X}$	χ^2	$f\chi^2$
۲۱_۲۳	۵	۲۲	۱۱۰	+۹	۸۱	۴۰۵
۱۸_۲۰	۷	۱۹	۱۳۳	+۶	۳۶	۲۵۲
۱۵_۱۷	۸	۱۶	۱۲۸	+۳	۹	۷۲
۱۲_۱۴	۱۰	۱۳	۱۳۰	۰	۰	۰
۹_۱۱	۸	۱۰	۸۰	-۳	۹	۷۲
۶_۸	۷	۷	۴۹	-۶	۳۶	۲۵۲
۳_۵	۵	۴	۲۰	-۹	۸۱	۴۰۵

$\Sigma f = ۵۰$ $\quad \Sigma fX' = ۶۵۰$ $\quad \bar{X} = ۱۳$ $\quad \Sigma f\chi^2 = ۱۴۵۸$

● ب) محاسبه واریانس با استفاده از اعداد خام

$$s^2 = \frac{\Sigma fX'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fX'}{n}\right)^2 \qquad (۴\text{-}۱۳)$$

نقطه میانی طبقه‌ها را در شرایطی که فاصله طبقه‌ها از یک بزرگتر است = X'

در صورتی که فاصله طبقه‌ها برابر یک باشد یا حد پایین و بالای هر طبقه یک عدد باشد مانند جدول ۳ـ۴ در فرمول به جای X' از X مطابق زیر استفاده می‌شود:

$$s^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2 \qquad (۴\text{-}۱۴)$$

در جدول ۵ـ۴ نمره‌های ۵۰ نفر دانش‌آموز در یک آزمون به صورت جدول توزیع فراوانی نشان داده شده است. پس از طبقه‌بندی نمره‌ها و تنظیم ستون فراوانی مراحل زیر به ترتیب انجام می‌شود:

۱. محاسبه نقاط میانی طبقه‌ها (X').

۲. ستون f و X' را در همدیگر ضرب کنید تا fX' به‌دست آید.

۳. حاصل جمع ستون fX' را به‌دست آورید ($\Sigma fX'$).

۴. ستون fX' را در ستون X' ضرب کنید تا fX'^2 به‌دست آید.

۵. حاصل جمع ستون fX'^2 را تعیین کنید ($\Sigma fX'^2$).

۶. مقادیر محاسبه‌شده به‌شرح فوق را در فرمول (۱۳ـ۴) جایگزین کنید.

جدول ۵-۴ محاسبه واریانس اعداد طبقه‌بندی شده با استفاده از فرمول (۱۳-۴)

طبقات	f	x´	fx´	fx´۲
۲۱_۲۳	۱	۲۲	۲۲	۴۸۴
۱۸_۲۰	۲	۱۹	۳۸	۷۲۲
۱۵_۱۷	۶	۱۶	۹۶	۱۵۳۶
۱۲_۱۴	۹	۱۳	۱۱۷	۱۵۲۱
۹_۱۱	۲۲	۱۰	۲۲۰	۲۲۰۰
۶_۸	۸	۷	۵۶	۳۹۲
۳_۵	۲	۴	۸	۳۲

$n = ۵۰$ $\quad \Sigma fx' = ۵۵۷ \quad \Sigma fx'^{۲} = ۶۸۸۷$

$$s^{۲} = \frac{\Sigma fx'^{۲}}{n} - \left(\frac{\Sigma fx'}{n}\right)^{۲}$$

$$s^{۲} = \frac{۶۸۸۷}{۵۰} - \left(\frac{۵۵۷}{۵۰}\right)^{۲}$$

$$s^{۲} = ۱۳۷/۷۴ - ۱۲۴/۰۹ = ۱۳/۶۵$$

روش دوم: محاسبه واریانس با استفاده از میانگین فرضی یا روش غیرمستقیم

هنگامی که اطلاعات جمع‌آوری‌شده به صورت جدول توزیع فراوانی تهیه و تنظیم شده باشند و فاصله طبقه‌ها باهم مساوی باشند، فرمول زیر برای محاسبه واریانس به‌کار برده می‌شود.

$$s^{۲} = (i)^{۲}\left[\frac{\Sigma f\tilde{x}^{۲}}{n} - \left(\frac{\Sigma f\tilde{x}}{n}\right)^{۲}\right] \qquad (۴\text{-}۱۵)$$

$i =$ فاصله طبقه‌ها

$\tilde{x} =$ فاصله طبقه‌ها تا طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین در آن قرار دارد

در جدول ۶-۴ نمره‌های ۱۰۰ نفر دانش‌آموز در یک آزمون به‌صورت جدول توزیع فراوانی نشان داده شده است. برای محاسبه واریانس، با استفاده از نمره‌های این جدول، پس از طبقه‌بندی نمره‌ها و تنظیم ستون فراوانی، مراحل زیر به‌ترتیب انجام می‌شود.

۱. ابتدا طبقه‌ای راکه فرض می‌شود میانگین در آن قرار دارد تعیین کنید. همان‌طور که قبلاً گفته شد معمولاً طبقه‌ای انتخاب می‌شود که در وسط طبقه‌ها قرار داشته باشد یا دارای بیشترین فراوانی باشد.

در جدول ۶ـ۴ طبقه ۱۱ ـ ۱۰ که دارای بیشترین فراوانی است انتخاب شده است.

۲. در ستون $\tilde{X}$ در جلوی طبقه‌ای که فرض می‌شود میانگین در آن قرار دارد، صفر و در همین ستون در جلوی طبقات بالاتر به ترتیب ۱+ ، ۲+ ، .... و در طبقه‌های پایین ۱- ، ۲- و .... بگذارید.

۳. ستون $\tilde{X}$ را در ستون f ضرب کنید، تا ستونی با عنوان $f\tilde{X}$ به‌دست آید.

۴. ستون $\tilde{X}$ را در ستون $f\tilde{X}$ ضرب کنید تا ستون $f\tilde{X}^{۲}$ به‌دست آید.

۵. حاصل جمع ستونهای $f\tilde{X}$ و $f\tilde{X}^{۲}$ را محاسبه کنید.

۶. مقادیر محاسبه‌شده را در فرمول ۱۵ ـ ۴ جایگزین کنید.

برای توضیح بیشتر به مثال مطرح‌شده در جدول ۶ـ۴ توجه کنید:

جدول ۶ـ۴ محاسبه واریانس با استفاده از میانگین فرضی

طبقات	f	x	$f\tilde{x}$	$f\tilde{x}^{۲}$
۲۰ـ۲۱	۲	۵	۱۰	۵۰
۱۸ـ۱۹	۳	۴	۱۲	۴۸
۱۶ـ۱۷	۵	۳	۱۵	۴۵
۱۴ـ۱۵	۹	۲	۱۸	۳۶
۱۲ـ۱۳	۲۰	۱	۲۰	۲۰
۱۰ـ۱۱	۳۴	۰	۰	۰
۸ـ۹	۱۳	-۱	-۱۳	۱۳
۶ـ۷	۶	-۲	-۱۲	+۲۴
۴ـ۵	۵	-۳	-۱۵	+۴۵
۲ـ۳	۳	-۴	-۱۲	+۴۸

$\Sigma f = ۱۰۰$ $\Sigma f\tilde{x} = ۲۳$ $\Sigma f\tilde{x}^{۲} = ۳۲۹$

$$s^{۲} = (۲)^{۲} \left[\frac{۳۲۹}{۱۰۰} - \left(\frac{۲۳}{۱۰۰}\right)^{۲}\right] = ۱۲/۹۴$$

واریانس مورد استفاده فراوانی در آمار استنباطی دارد ولی استفاده آن در آمار توصیفی محدود است. زیرا با مجذورکردن انحراف نمره‌ها از میانگین، واحد واریانس یا واحد اندازه‌گیری تغییر پیدا خواهد کرد. به این معنی که برای مثال در صورتی که قدّ عده‌ای دانش‌آموز را براساس سانتی‌متر اندازه‌گیری کنیم، واریانس محاسبه‌شده برحسب سانتی‌متر مربع خواهد بود.

خودآزمایی ۳ ـ ۴

۱. نمره‌های زیر به تعداد لغاتی مربوط است که ۶ نفر دانش‌آموز پس از مطالعه به‌خاطر می‌آورند. واریانس این نمره‌ها را محاسبه کنید: ۳، ۴، ۴، ۵، ۶، ۸

۲. واریانس توزیع نمره‌های زیر را محاسبه کنید:

۶، ۴، ۵، ۶، ۸، ۵، ۷، ۱۰، ۱۰، ۹، ۱۰

۳. در صورتی که واریانس نمره‌های ریاضی ۵۰ نفر دانش‌آموز ۹/۵ باشد، مجموع مجذور انحرافهای نمره‌ها از میانگین چقدر است؟

انحراف استاندارد[1] (معیار)

مشکل اختلاف واحد اندازه‌گیری با واحد واریانس را می‌توان با جذرگرفتن از واریانس حل کرد. این عمل موجب می‌شود که واحد شاخص محاسبه‌شده با واحد اندازه‌گیری به‌کار برده شده یکسان شود و یکی از شاخصهای معتبر آماری به‌نام انحراف استاندارد یا انحراف معیار به‌دست آید. بنابراین انحراف استاندارد را می‌توان جذر یا ریشه دوم میانگین مجذور انحراف نمره‌ها نامید. به عبارت دیگر، جذر واریانس، انحراف استاندارد نامیده می‌شود.

σ جذر σ^2 است و برای نشان‌دادن انحراف استاندارد جامعه به‌کار برده می‌شود. بنابراین با توجه به تعریف انحراف استاندارد و فرمول شماره (۷ ـ ۴) این شاخص را می‌توان با استفاده از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \chi^2}{N}} \qquad (۴ـ۱۶)$$

انحراف نمره‌ها از میانگین $\chi = X - \bar{X}$

تعداد نمره‌ها $= N$

انحراف استاندارد $= \sigma$

برای محاسبه انحراف استاندارد با استفاده از فرمول ۱۶ ـ ۴ مراحل زیر را انجام دهید:

۱. انحراف هریک از نمره‌ها را از میانگین پیدا کنید (χ).

۲. هریک از انحرافهای محاسبه‌شده را به توان دو برسانید (χ^2).

۳. انحرافهای مجذورشده را باهم جمع کنید $(\Sigma\chi^2)$.

۴. مجموع مجذور انحرافهای محاسبه‌شده را به تعداد نمره‌ها (N) تقسیم کنید.

۵. جذر σ^2 را محاسبه کنید.

1. Standard deviation